§ 1. ЦЕНТР МАСС

При рассмотрении движения твердых тел и других механических систем важное значение имеет точка, называемая **центром масс**. Если механическая система состоит из конечного числа материальных точек N с массами m_1, m_2, ..., m_N, радиусы-векторы которых, проведенные из одной и той же точки O, — $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, ..., $\bar{r}_N$ (рис. 21), то *центром масс называется геометрическая точка* C, радиус-вектор которой $\bar{r}_C$ определяется выражением

$$\bar{r}_C = \sum_{k=1}^{N} m_k \bar{r}_k / M, \tag{1}$$

где $M = \sum_{k=1}^{N} m_k$ — масса системы. Обозначая декартовы координаты материальных точек (x_1, y_1, z_1), ..., (x_N, y_N, z_N), из (1) проецированием на декартовы оси координат получим следующие формулы для координат центра масс:

$$x_C = \sum_{k=1}^{N} m_k x_k / M; \quad y_C = \sum_{k=1}^{N} m_k y_k / M; \quad z_C = \sum_{k=1}^{N} m_k z_k / M. \tag{1'}$$

Центр масс является не материальной точкой, а **геометрической**. Он может не совпадать ни с одной материальной точкой системы, как, например, в случае кольца. Центр масс системы характеризует распределение масс в системе.

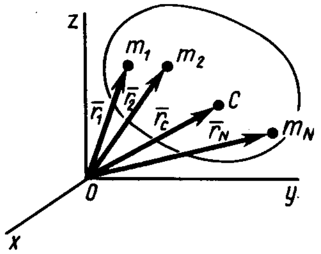

Рис. 21

Векторная величина $\bar{S}_O = \sum_{k=1}^{N} m_k \bar{r}_k$ называется *статическим моментом массы относительно точки* O. Скалярная величина $S_{Oyz} = \sum_{k=1}^{N} m_k x_k$ называется *статическим моментом массы относительно координатной плоскости* Oyz. Величины $S_{Oxz} = \sum_{k=1}^{N} m_k y_k$ и $S_{Oxy} = \sum_{k=1}^{N} m_k z_k$ являются соответственно статическими моментами массы относительно координатных плоскостей Oxz и Oxy.

Радиус-вектор и координаты центра масс через статические моменты массы выражаются формулами

$$\bar{r}_C = \bar{S}_O / M; \quad x_C = S_{Oyz} / M; \quad y_C = S_{Oxz} / M; \quad z_C = S_{Oxy} / M.$$

Если механическая система представляет собой сплошное тело, то его разбивают на элементарные частицы с бесконечно малыми массами $\mathrm{d}m$ и с изменяющимися от частицы к частице радиусом-вектором $\bar{r}$.

Суммы в пределе переходят в интегралы. Формулы (1) и (1') принимают форму

$$\bar{r}_C = \int \bar{r}\,\mathrm{d}m / M, \tag{2}$$

$$x_C = \int x\,\mathrm{d}m / M; \quad y_C = \int y\,\mathrm{d}m / M; \quad z_C = \int z\,\mathrm{d}m / M, \tag{2'}$$

где $M = \int \mathrm{d}m$ — масса тела.

Для однородных сплошных тел $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V$; $M = \rho V$, где ρ — плотность тела, общая для всех элементарных частиц; $\mathrm{d}V$ — объем элементарной частицы; V — объем тела.

Для тел типа тонкого листа, которые можно принять за однородные материальные поверхности, $\mathrm{d}m = \rho_S \mathrm{d}S$; $M = \rho_S S$, где ρ_S — поверхностная плотность; $\mathrm{d}S$ — площадь поверхности элементарной частицы; S — площадь поверхности.

Для тонкой проволоки, которую можно принять за отрезок линии, $\mathrm{d}m = \rho_l \mathrm{d}l$, $M = \rho_l l$, где ρ_l — линейная плотность; $\mathrm{d}l$ — длина элемента линии; l — длина отрезка линии.

В этих случаях определение центра масс тел сводится к вычислению центра масс объемов, площадей и длин линий соответственно.